ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ
(QUADRATIC EQUATIONS)

2.1. ଉପକ୍ରମ :

$P(x) = ax^2 + bx + c$ ଗୋଟିଏ ଦ୍ୱିଘାତ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଯେଉଁଠାରେ $a \neq 0$। ଚଳ ରାଶି x ର ମାନ s ନେଲେ p(x)ର ମାନ p(s) ଅଟେ ଓ $p(s) = as^2 + bs^2 + c$ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ ଦ୍ୱିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଟି $p(x) = 3x^2 - 2x + 5$ ହେଲେ $x = 2$ ପାଇଁ p(x)ର ମାନ $p(2) = 3 \times 2^2 - 2 \times 2 + 5 = 12 - 4 + 5 = 13$

ଯଦି $x = \alpha$ ପାଇଁ ଦ୍ୱିଘାତ ପଲିନୋମିଆଲ $ax^2 + bx + c$ ର ମାନ ଶୂନ ହୁଏ ତେବେ αକୁ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଶୂନ (zero) କୁହାଯାଏ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ $x^2 - 5x + 6$ ଦ୍ୱିଘାତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର $x = 3$ ପାଇଁ ମାନ

$3^2 - 5 \times 3 + 6 = 9 - 15 + 6 = 0$ ହେତୁ

3, ଦ୍ୱିଘାତ ପଲିନୋମିଆଲ୍ $x^2 - 5x + 6$ରେ ଗୋଟିଏ ଶୂନ ଅଟେ। ପ୍ରତ୍ୟେକ ଦ୍ୱିଘାତ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଗୋଟିଏ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଅଟେ। $ax^2 + bx + c$ ଦ୍ୱିଘାତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଟି

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0 \qquad (1)$$

ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ସହ ସମ୍ପୃକ୍ତ $ax^2 + bx + c$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର $x = \alpha$ ଏକ ଶୂନ ହେଲେ ତାହା ସମ୍ପୃକ୍ତ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ (1)ର ଏକ ମୂଳ ବା ବୀଜ (root) ଅଟେ। ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ଆମେ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ମୂଳ କିପରି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ତାହା ଆଲୋଚନା କରାଯିବ।

ଏଠାରେ ଉଲ୍ଲେଖଯୋଗ୍ୟ ଯେ ଗୋଟିଏ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ $ax + b = 0, a \neq 0$ର ଗୋଟିଏ ମୂଳ ଅଛି। ଏକ ଦ୍ୱିଘାତୀ ସମୀକରଣର ଦୁଇଗୋଟି ମୂଳ ଅଛନ୍ତି।

(ଗୋଟିଏ n ଘାତୀ ସମୀକରଣ $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0, a_n \neq 0$ ର n ସଂଖ୍ୟକ ମୂଳ ଅଛନ୍ତି। ଏହି ଉପପାଦ୍ୟଟି ବୀଜଗଣିତର ମୌଳିକ ଉପପାଦ୍ୟ (Fundamental theorem of Algebra) ଓ ଏହାର ପ୍ରମାଣ ଉଚ୍ଚତର ଗଣିତ ଅଧ୍ୟୟନ କଲେ ଜାଣିବ।) ସୁତରାଂ ଦ୍ୱିଘାତୀ ସମୀକରଣର ସାଧାରଣ ରୂପ (1) ଅଟେ ଓ ଏହାର ଦୁଇଟି ମୂଳ α ଓ β ଅଛନ୍ତି।

ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ (1) ଦିଆଯାଇଥିଲେ ଏହାକୁ ସମାଧାନ କରିବା ଅର୍ଥ ହେଲା ଏହାର ମୂଳ α ଓ β ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା।

2.2. ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗରେ ପରିଣତ କରି ସମାଧାନ ପ୍ରଣାଳୀ **(Solution by completing the squares) :**

ଦଶମ ଶତାବ୍ଦୀର ପ୍ରସିଦ୍ଧ ଭାରତୀୟ ଗଣିତଜ୍ଞ ଶ୍ରୀଧର ଆଚାର୍ଯ୍ୟ ଏହି ପ୍ରଣାଳୀର ଉଦ୍‌ଭାବକ ଅଟନ୍ତି।

ମନେକର ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣଟି $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$

c କୁ ପାର୍ଶ୍ୱ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରି ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ 4a ଗୁଣନ କଲେ ପାଇବା

$$4a\,(ax^2 + bx) = 4a(-c) \Rightarrow 4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

$$\Rightarrow (2ax)^2 + 2 \times (2ax) \times b = -4ac$$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ b^2 ଯୋଗ କଲେ

$$(2ax)^2 + 2(2ax)\,b + b^2 = b^2 - 4ac$$

$$\Rightarrow (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \Rightarrow (2ax - b)^2 = (\pm\sqrt{b^2 - 4ac}\,)^2$$

(ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗରେ ପରିଣତ କରାଗଲା)

$$\Rightarrow 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \qquad \Rightarrow 2ax = -b \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2a}\left\{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right\} \text{ କିମ୍ବା } x = \frac{1}{2a}\left\{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right\}$$

ଅତଏବ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ମୂଳ α ଓ β ହେଲେ;

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2a}\left\{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right\}\\ \beta &= \frac{1}{2a}\left\{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right\}\end{aligned}\right\}$$

ଏବଂ ଏହା ଦ୍ୱିଘାତ ସୂତ୍ର **(Quadratic formula)** ନାମରେ ପରିଚିତ।

ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀ :

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \text{ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ a ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରାଗଲା)}$$

$$\Rightarrow x^2 + 2\,.\,x\,.\,\frac{b}{2a} = -\frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow x^2 + 2\,.\,x\,.\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \text{ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ } \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \text{ ଯୋଗ କରାଗଲା)}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)^2 \text{ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗରେ ପରିଣତ କରାଗଲା)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ ଅଥବା } \frac{1}{2a}\left\{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right\}$$

ତେଣୁ ବୀଜଦ୍ୱୟ ହେଲେ $\alpha = \frac{1}{2a}\left\{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right\},\ \beta = \frac{1}{2a}\left\{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right\}$

ଉଦାହରଣ - 1 :

ଦ୍ୱିଘାତ ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରି $x^2 - 2x - 3 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳ α ଓ β ନିରୂପଣ କର।

ସମାଧାନ :

ଏଠାରେ $a = 1, b = -2, c = -3$ ଅତଏବ

$$\alpha = \frac{1}{2a}\left\{-b+\sqrt{b^2-4ac}\right\} = \frac{1}{2\times1}\left\{-(-2)+\sqrt{(-2)^2-4\times1\times(-3)}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{2+\sqrt{4+12}\right\} = \frac{1}{2}\left\{2+4\right\} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\beta = \frac{1}{2a}\left\{-b-\sqrt{b^2-4ac}\right\} = \frac{1}{2\times1}\left\{-(-2)-\sqrt{(-2)^2-4\times1\times(-3)}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{2-\sqrt{4+12}\right\} = \frac{1}{2}(2-4) = \frac{-2}{2} = -1$$

ଅତଏବ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ମୂଳଦ୍ୱୟ 3 ଓ –1 । (ଉତ୍ତର)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ :

ସମୀକରଣର ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବା ଦ୍ୱିଘାତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ କରି ଆମେ ମୂଳ ଜାଣିପାରିବା।

ମାତ୍ର a(x^2ର ସହଗ), b(xର ସହଗ) ଓ c(ଧ୍ରୁବକ ରାଶି) ତ୍ରୟ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ଓ ଅପେକ୍ଷାକୃତ କ୍ଷୁଦ୍ର ହୋଇଥିଲେ ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ପ୍ରଣାଳୀ ଗ୍ରହଣଯୋଗ୍ୟ। ମାତ୍ର a, b, c ଯେକୌଣସି ବାସ୍ତବସଂଖ୍ୟା କିମ୍ବା ଅତି ବୃହତ୍ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ହୋଇଥିଲେ ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଅତ୍ୟନ୍ତ କଷ୍ଟସାଧ ହୋଇ ଯାଇଥାଏ। ସୁତରାଂ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗରେ ପରିଣତ କରି ସମାଧାନ କରାଯିବା ଉଚିତ।

ଉଦାହରଣ - 2 :

ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗରେ ପରିଣତ କରି $2x^2 + 9x - 18 = 0$ ସମୀକରଣଟିର ସମାଧାନ କର।

ସମାଧାନ :

ଏଠାରେ $a = 2, b = 9$ ଓ $c = -18$

4a ଅର୍ଥାତ୍ 8 ଦ୍ୱାରା $2x^2 + 9x = 18$ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ଗୁଣନ କଲେ

$$8(2x^2 + 9x) = 8 \times 18 \Rightarrow 16x^2 + 72x = 144$$

$$\Rightarrow (4x)^2 + 2(4x)\,9 + (9)^2 = 9^2 + 144$$

$$\Rightarrow (4x + 9)^2 = 81 + 144 = 225 = (\pm15)^2$$

$$\Rightarrow 4x + 9 = \pm15 \Rightarrow 4x = -9 \pm 15 \Rightarrow 4x = 6 \text{ କିମ୍ବା } -24$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{2} \text{ କିମ୍ବା } -6$$

∴ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ମୂଳଦ୍ୱୟ $\alpha = \frac{3}{2}$ ଓ $\beta = -6$ । (ଉତ୍ତର)

ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀ :

ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଟି $2x^2 + 9x - 18 = 0$ ।

$$\Rightarrow x^2 + \frac{9}{2}x - 9 = 0 \text{ (2 ଦ୍ୱାରା ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ଭାଗ କରାଗଲା)}$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{9}{2}x = 9 \Rightarrow x^2 + 2 \times x \times \frac{9}{4} = 9$$

$$\Rightarrow x^2 + 2 \times x \times \frac{9}{4} + \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \left(\frac{9}{4}\right)^2 + 9 \text{ [ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ } \left(\frac{9}{4}\right)^2 \text{ ମିଶାଗଲେ]}$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{9}{4}\right)^2 = \frac{81 + 144}{16} = \frac{225}{16} \Rightarrow \left(x + \frac{9}{4}\right)^2 = \left(\pm\frac{15}{4}\right)^2$$

$$\Rightarrow x + \frac{9}{4} = \pm\frac{15}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{15}{4} - \frac{9}{4}$$

ଅର୍ଥାତ୍ $x = \dfrac{-9 + 15}{4} = \dfrac{3}{2}$ କିମ୍ବା $x = \dfrac{-9 - 15}{4} = -6$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ମୂଳଦ୍ୱୟ $\dfrac{3}{2}$ ଓ -6 । (ଉତ୍ତର)

2.3. କେତେଗୁଡ଼ିଏ ଜ୍ଞାତବ୍ୟ ବିଷୟ :

ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ହେଲେ

$$\alpha = \frac{1}{2a}\left\{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right\}, \ \beta = \frac{1}{2a}\left\{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right\}$$

(I) ମୂଳଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି ଓ ଗୁଣଫଳ :

$$\alpha + \beta = \frac{1}{2a}\left\{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right\} + \frac{1}{2a}\left\{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right\}$$

$$= \frac{1}{2a}\left\{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right\} = -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$\therefore \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

ଏବଂ $$\alpha\beta = \frac{1}{2a}\left\{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}\right\} \times \frac{1}{2a}\left\{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}\right\}$$

$$= \frac{1}{4a^2}\left\{(-b)^2 - \left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2\right\} = \frac{1}{4a^2}\left(b^2 - b^2 + 4ac\right) = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$\therefore \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$\therefore$ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ $ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$ରେ

ମୂଳଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି $= -\dfrac{b}{a}$ ଏବଂ ମୂଳଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ $= \dfrac{c}{a}$

ଯେଉଁଠାରେ $a = x^2$ ର ସହଗ, $b = x$ ର ସହଗ ଏବଂ $c = x$ ବିହୀନ ପଦ।

ଉଦାହରଣ - 3 :

ଏକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି 2 ଓ ଗୁଣଫଳ $\frac{3}{4}$ ହେଲେ ସମୀକରଣଟି ନିରୂପଣ କର।

ସମାଧାନ :

α ଓ β ସମୀକରଣର ମୂଳ ହେଲେ, ସମୀକରଣଟି $(x - \alpha)(x - \beta) = 0$ ହେବ

$$\Rightarrow x^2 - \alpha x - x\beta + \alpha\beta = 0 \Rightarrow x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$$

ଏଠାରେ $\alpha+\beta = 2$ ଓ $\alpha\beta = \frac{3}{4}$ । ତେଣୁ ସମୀକରଣଟି $x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0$ ।

$$\Rightarrow 4x^2 - 8x + 3 = 0$$ । (ଉତ୍ତର)

ସୂଚନା :

$ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$

$\Rightarrow a\left[x^2 - \left(\frac{-b}{a}\right)x + \frac{c}{a}\right] = 0$ (a ଦ୍ୱାରା ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ଭାଗକଲେ)

$\Rightarrow x^2 - \left(\frac{-b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0$ ହେବ। ($\because a \neq 0$)

ଅର୍ଥାତ୍ ଆବଶ୍ୟକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ x^2 – (ବୀଜଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି) x + ବୀଜଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ = 0

ବୀଜଦ୍ୱୟ ଜଣାଥିଲେ ସିଧାସଳଖ ଉପରୋକ୍ତ ସୂତ୍ରକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ଗଠନ କରାଯାଇପାରେ।

(II) ପ୍ରଭେଦକ (Discriminant) :

$b^2 - 4ac$କୁ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ପ୍ରଭେଦକ କୁହାଯାଏ ଏହି। $b^2 - 4ac$ କୁ 'D' ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରିପାରିବା। ଅର୍ଥାତ୍ $D = b^2 - 4ac$।

ସାଧାରଣତଃ ଆମେ ଯେଉଁ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ବିଚାର କରିବା ସେଥିରେ a, b ଓ c ରାଶିତ୍ରୟ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ଓ $a \neq 0$ । D ମାଧ୍ୟମରେ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ ହେଲେ :

$$\alpha = \frac{1}{2a}\left(-b + \sqrt{D}\right), \ \beta = \frac{1}{2a}\left(-b - \sqrt{D}\right)$$

ବୀଜଦ୍ୱୟର ସ୍ୱରୂପ :

(i) ଯଦି ପ୍ରଭେଦକ $D > 0$, ତେବେ α ଓ β ମୂଳଦ୍ୱୟ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ ପରସ୍ପର ଠାରୁ ପୃଥକ୍ ହେବେ।

(ii) ଯଦି $D = 0$ ତେବେ ମୂଳଦ୍ୱୟ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ ହେବେ।

(iii) $D < 0$ ହେଲେ ମୂଳଦ୍ୱୟ ବାସ୍ତବ ହେବେ ନାହିଁ।

ଆମର ଆଲୋଚନାର ପରିସରଭୁକ୍ତ ସମସ୍ତ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣମାନଙ୍କ ପ୍ରଭେଦକ $D \geq 0$ ଅର୍ଥାତ୍ ସେମାନଙ୍କ ମୂଳଦ୍ୱୟ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଯାହା ପରସ୍ପର ପୃଥକ୍ କିମ୍ବା ଅଭିନ୍ନ ହେବେ।

ଉଦାହରଣ - 4 :

$2x^2 - 8x + 5 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ ବାସ୍ତବ ଓ ଭିନ୍ନ ବୋଲି ଦର୍ଶାଅ ଓ $\alpha - \beta$ ର ମାନ ନିରୂପଣ କର।

ସମାଧାନ :

ଦତ୍ତ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣରେ $a = 2, b = -8$ ଓ $c = 5$

$\therefore$ ପ୍ରଭେଦକ $D = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 2 \times 5 = 64 - 40 = 24$

ଯେହେତୁ $D > 0$, ମୂଳଦ୍ୱୟ (α ଓ β) ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ ଭିନ୍ନ ଅଟନ୍ତି।

ପୁନଶ୍ଚ ଏଠାରେ ମୂଳଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି ଓ ଗୁଣଫଳ ଯଥାକ୍ରମେ

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\left(\frac{-8}{2}\right) = 4, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{5}{2}$$ ।

ଯେହେତୁ $(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (4)^2 - 4 \times \frac{5}{2} = 16 - 10 = 6$

$$\therefore \alpha - \beta = \pm\sqrt{6}$$

(ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 2(a)

ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରଶ୍ନପାଇଁ ଥିବା ସମ୍ଭାବ୍ୟ ଉତ୍ତରଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛି ଲେଖ।

(i) କେଉଁଟି –2 ଓ 3 ମୂଳ ବିଶିଷ୍ଟ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ?

(a) $(x-2)(x-3) = 0$ (b) $(x+2)(x+3) = 0$

(c) $(x-2)(x+3) = 0$ (d) $(x+2)(x-3) = 0$

(ii) କେଉଁ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ ସମାନ ଓ ପ୍ରତ୍ୟେକ 1 ?

(a) $x^2 - 2x + 1 = 0$ (b) $x^2 + 2x + 1 = 0$

(c) $x^2 - x + 2 = 0$ (d) $x^2 + x - 2 = 0$

(iii) $3x^2 + 9x - 2 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ହେଲେ $\alpha + \beta$ ର ମୂଲ୍ୟ କେତେ ?

(a) 9 (b) 2 (c) –3 (d) $\frac{-2}{3}$

(iv) $-2x^2 + 5x + 1 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ହେଲେ $\alpha\beta$ ର ମୂଲ୍ୟ କେତେ ?

(a) $-\frac{5}{2}$ (b) $\frac{2}{5}$ (c) 2 (d) $-\frac{1}{2}$

(v) ଗୋଟିଏ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟର ଯୋଗଫଳ ଓ ଗୁଣଫଳ ଯଥାକ୍ରମେ –5 ଓ 3 ହେଲେ ସମୀକରଣଟି ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ?

(a) $x^2 + 5x + 3 = 0$ (b) $x^2 - 5x + 3 = 0$

(c) $x^2 + 5x - 3 = 0$ (d) $x^2 - 5x - 3 = 0$

(vi) $x^2 + 15x + 3 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ହେଲେ $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$ ର ମୂଲ୍ୟ କେତେ ?

(a) $\frac{1}{5}$ (b) 3 (c) –5 (d) –3

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କର ସଂକ୍ଷିପ୍ତ ଉତ୍ତର ଆବଶ୍ୟକ ।

(i) $5x^2 + 2x + c = 0$ ସମୀକରଣର ଗୋଟିଏ ମୂଳ –2 ହେଲେ c ର ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

(ii) $x^2 - px + 2 = 0$ ସମୀକରଣର ଗୋଟିଏ ମୂଳ 2 ହେଲେ p ର ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

(iii) ଦ୍ୱିଘାତ ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରି $x^2 - x - 6 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ ନିରୂପଣ କର ।

(iv) $x^2 - 5x + 6 = 0$ ସମୀକରଣଟିକୁ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗରେ ପରିଣତ କରି ସମାଧାନ କରିବା ପାଇଁ ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ କେତେ ଯୋଗ କରିବାକୁ ପଡ଼ିବ ସ୍ଥିର କର

(v) $2x^2 - 6x = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ ନିରୂପଣ କର ।

(vi) $x^2 + px + 1 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ହେଲେ $\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ ପରିପ୍ରକାଶ କୁ p ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

3. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣମାନଙ୍କୁ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗରେ ପରିଣତ କରି ସମାଧାନ କର ।

(i) $x^2 + x - 6 = 0$ (ii) $2x^2 - 9x + 4 = 0$

(iii) $x^2 - 2x - 2 = 0$ (iv) $x^2 + 2px - 3qx - 6pq = 0$

(v) $14x^2 + x - 3 = 0$ (vi) $x^2 - \frac{19x}{6}+\frac{5}{2} = 0$

(vii) $3x^2 - 32x + 12 = 0$ (viii) $\sqrt{3}x^2 + 10x + 8\sqrt{3} = 0$

(ix) $5x^2 - 19x + 17 = 0$ (x) $\sqrt{7}x^2 - 6x - 13\sqrt{7} = 0$

(xi) $25x^2 + 30x + 7 = 0$ (xii) $3a^2x^2 + 8abx + 4b^2 = 0$ $(a \neq 0)$

4. ନିମ୍ନ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ବିଜଦ୍ୱୟ ପୂର୍ଣ୍ଣବର୍ଗରେ ପରିଣତ କରି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $x^2 + ax + b = 0$ (ii) $x^2 + bx = a^2 - ab$

5. ଦ୍ୱିଘାତ ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରି ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣମାନଙ୍କ ମୂଳ ନିରୂପଣ କର ।

(i) $(2x-1)(x-2) = 0$ (ii) $(6x + 5)(x - 2) = 0$

(iii) $x^2 - 3x = 0$ (iv) $4x^2 - 25 = 0$

(v) $6x^2 + 11x + 3 = 0$ (vi) $x^2 - (1 +\sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$

(vii) $a(x^2+1) - x(a^2 + 1) = 0$ (viii) $15x^2 - x - 28 = 0$

6. $x^2 - 5x + q = 0$ ସମୀକରଣର ଗୋଟିଏ ମୂଳ ଅପରଟି ଅପେକ୍ଷା 3 ଅଧିକ ହେଲେ q ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର।

7. ଯଦି $ax^2 + bx + c = 0$ ସମୀକରଣର ଗୋଟିଏ ମୂଳ ଅପରଟିର 4ଗୁଣ ହେଲେ ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $4b^2 = 25ac$ ।

8. ଯଦି $x^2 - px + q = 0$ ସମୀକରଣର ଗୋଟିଏ ମୂଳ ଅପରିଟିର 2ଗୁଣ ହେଲେ ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $2p^2 = 9q$ ।

9. $2x^2 - (p+1)x + p - 1 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର ଓ ଗୁଣଫଳ ସମାନ ହେଲେ p ର ମାନ ନିରୂପଣ କର।

10. ଯଦି $2x^2 - 6x + 3 = 0$ ସମୀକରଣର ମୂଳଦ୍ୱୟ α ଓ β ହୁଏ ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ –

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + 3\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) + 2\alpha\beta = 13$$

2.4. ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ରୂପରେ ରୂପାନ୍ତରଣ :

ଏପରି ଅନେକ ସମୀକରଣ ଅଛନ୍ତି ଯେଉଁମାନଙ୍କ ରୂପ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ରୂପ $ax^2 + bx + c = 0$ ନୁହେଁ। ମାତ୍ର ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିକୁ ଉପଯୁକ୍ତଭାବେ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରି ଏମାନଙ୍କୁ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ରୂପକୁ ଆଣି ହେବ ଓ ସମାଧାନ କରିହେବ। ଏପରି କେତେଗୁଡ଼ିଏ ସମୀକରଣର ଉଦାହରଣ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି।

ଉଦାହରଣ - 5 :

$2x^4 - 7x^2 + 3 = 0$ ସମୀକରଣଟିର ମୂଳ ନିରୂପଣ କର।

ସମାଧାନ :

$2x^4-7x^2+3 = 0$ ସମୀକରଣଟିର ଘାତ 4 ଓ ଏହା ଦ୍ୱିଘାତ ନୁହେଁ। ମାତ୍ର $x^2 = t$ ଲେଖିଲେ ଏହାର ରୂପ

$$2t^2 - 7t + 3 = 0 \qquad \text{(i)}$$

ଅଟେ। ସମୀକରଣ (i) ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି t ରେ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ଅଟେ। ଦ୍ୱିଘାତ ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରି ପ୍ରଥମେ ସମୀକରଣ (i)ର ମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯିବ।

$$t = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(7)^2 - 4 \times 2 \times 3}}{2 \times 2} = \frac{7 \pm 5}{4} \Rightarrow t = 3 \text{ କିମ୍ବା } \frac{1}{2}$$

ଯଦି $t = 3 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3}$ ବା $-\sqrt{3}$

ପୁନଶ୍ଚ ଯଦି $t = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ବା $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

∴ ଆବଶ୍ୟକୀୟ ମୂଳଗୁଡ଼ିକ $\sqrt{3}, -\sqrt{3}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$ ବା $\left(\pm\sqrt{3}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ । (ଉତ୍ତର)

[ଏଠାରେ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଟିର ଘାତ 4, ତେଣୁ ଏହାର ଚାରିଗୋଟି ମୂଳ ରହିବ]

ଉଦାହରଣ - 6 :

ସମାଧାନ କର : $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+14=0$

ସମାଧାନ :

ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଟି $x^2+\frac{1}{x^2}-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+14=0$

$$\Rightarrow \left(x^2+\frac{1}{x^2}+2\right)-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+12=0$$

$$\Rightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+12=0 \qquad \text{(i)}$$

$x+\frac{1}{x}=t$ ଲେଖିଲେ ସମୀକରଣର ରୂପ $t^2-7t+12=0$ ହେବ।

ଯାହା t ରେ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ଅଟେ। ଏହାର ମୂଳଦ୍ୱୟ 3 ଓ 4। (ନିଜେ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ)

$$t=3 \Rightarrow x^2-3x+1=0 \Rightarrow x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{9-4}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$t=4 \Rightarrow x^2-4x+1=0 \Rightarrow x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{16-4}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}=2\pm\sqrt{3}$$

$\therefore$ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣର ମୂଳଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $2+\sqrt{3}$, $2-\sqrt{3}$ ।

(ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 7 :

ସମାଧାନ କର : $\sqrt{\frac{x}{1-x}}+\sqrt{\frac{1-x}{x}}=2\frac{1}{6}$

ସମାଧାନ :

ମନେକର $\sqrt{\frac{x}{1-x}}=t$, ତେବେ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଟି $t+\frac{1}{t}=\frac{13}{6}$ ହେବ।

$\Rightarrow 6t^2-13t+6=0 \Rightarrow (2t-3)(3t-2)=0 \Rightarrow t=\frac{3}{2}$ କିମ୍ବା $t=\frac{2}{3}$

$$t=\frac{3}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{x}{1-x}}=\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{x}{1-x}=\frac{9}{4} \Rightarrow x=\frac{9}{13}$$

$$t=\frac{2}{3} \Rightarrow \sqrt{\frac{x}{1-x}}=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{x}{1-x}=\frac{4}{9} \Rightarrow x=\frac{4}{13}$$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନଦ୍ୱୟ $\frac{9}{13}$ ଓ $\frac{4}{13}$ । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 8 :

ସମାଧାନ କର, $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=8$

ସମାଧାନ :

ପ୍ରଦତ୍ତ ସମୀକରଣରୁ ପାଇବା $\{(x + 1)(x + 4)\}\{(x + 2)(x + 3)\} = 8$

$\Rightarrow (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 8$

$x^2 + 5x = t$ ନେଲେ ଉକ୍ତ ସମୀକରଣଟି $(t + 4)(t + 6) = 8$ ହେବ।

$\Rightarrow t^2 + 10t + 24 = 8 \Rightarrow t^2 + 10t + 16 = 0$

ଯାହା t ରେ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ। ଦ୍ୱିଘାତ ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କଲେ

$$t = \frac{-10 \pm \sqrt{100-64}}{2} = \frac{-10 \pm 6}{2} = -2 \text{ କିମ୍ବା } -8$$

$$t = -2 \Rightarrow x^2 + 5x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-8}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}\left(-5+\sqrt{17}\right) \text{ କିମ୍ବା, } x = \frac{1}{2}\left(-5-\sqrt{17}\right)$$

ପୁନଶ୍ଚ, $t = -8 \Rightarrow x^2 + 5x + 8 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-32}}{2}$

ଏଠାରେ $D < 0$ ହେତୁ 'x' ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ, ତେଣୁ ଏହା ଗ୍ରହଣୀୟ ନୁହେଁ। ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଟିର ବାସ୍ତବ ସମାଧାନ ଦ୍ୱୟ $\frac{1}{2}\left(\sqrt{17}-5\right)$ ଓ $-\frac{1}{2}\left(\sqrt{17}+5\right)$। (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 9 :

ସମାଧାନ କର : $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+2}=5$

ସମାଧାନ :

$2x + 5 + x + 2 + 2\sqrt{(2x+5)(x+2)} = 25$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ବର୍ଗ ନେଲେ)

$\Rightarrow 2\sqrt{(2x+5)(x+2)} = 18 - 3x$

$\Rightarrow 4(2x+5)(x+2) = 324 - 108x + 9x^2$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ବର୍ଗ ନେଲେ)

$\Rightarrow x^2 - 144x + 284 = 0 \Rightarrow (x-142)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 142$ ବା 2

$x = 2$ ଦ୍ୱାରା ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଟି ସିଦ୍ଧ ହେଉଛି; ମାତ୍ର $x = 142$ ହେଲେ,

$$\sqrt{2x+5}+\sqrt{x+2} \neq 5$$

$\therefore$ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ହେଲା $x = 2$। (ଉତ୍ତର)

2.5. ପାଟୀ ଗଣିତର ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କ ସମାଧାନ :

ପାଟୀ ଗଣିତର ଅନେକ ପ୍ରଶ୍ନ ସମାଧାନ ବୀଜଗାଣିତିକ ପଦ୍ଧତିରେ କଲାବେଳେ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ଉପୁଜିଥାଏ ଓ ଏହି ସମୀକରଣର ସମାଧାନ କଲେ ମୂଳ ପ୍ରଶ୍ନଟିର ସମାଧାନ କରିହୁଏ। ଏ ଧରଣର କେତେଗୁଡ଼ିଏ ଉଦାହରଣକୁ ଦେଖ।

ଉଦାହରଣ - 10 :

ଦୁଇଗୋଟି କ୍ରମିକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ 306 ହେଲେ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ :

ମନେକର ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ k ଓ $k+1$। ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ

$$k(k+1) = 306 \Rightarrow k^2 + k - 306 = 0$$

ଓ ଏହା kରେ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ। ଦ୍ୱିଘାତ ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କଲେ

$$k = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-306)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1225}}{2} = \frac{-1 \pm 35}{2}$$

ଅର୍ଥାତ୍ $k = 17$ କିମ୍ବା -18

∴ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ 17, 18 କିମ୍ବା −18, −17 । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 11 :

କୌଣସି ଏକ ଅରଣ୍ୟରେ ବାସ କରୁଥିବା ମର୍କଟମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ସେମାନଙ୍କ ସଂଖ୍ୟାର ଏକ ଅଷ୍ଟମାଂଶର ବର୍ଗ କ୍ରୀଡ଼ାରତ ଏବଂ ଅବଶିଷ୍ଟ ବାରଟି ମର୍କଟ ଏକ ଶୃଙ୍ଗ ଉପରେ ବସିଥିଲେ। ଅରଣ୍ୟରେ ସମ୍ଭବତଃ କେତେ ମର୍କଟ ଥିଲେ ?

[ପ୍ରଶ୍ନଟି ଦ୍ୱାଦଶ ଶତାବ୍ଦୀର ଭାରତୀୟ ଗଣିତଜ୍ଞ ଦ୍ୱିତୀୟ ଭାସ୍କରଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ରଚିତ ପୁସ୍ତକ 'ସିଦ୍ଧାନ୍ତ ଶିରୋମଣି'ର 'ଲୀଳାବତୀ' ଅଧ୍ୟାୟରେ ପ୍ରଦତ୍ତ]

ସମାଧାନ :

ମନେକର ଅରଣ୍ୟରେ ମର୍କଟଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା = n। କ୍ରୀଡ଼ାରତ ମର୍କଟଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା = $\left(\frac{n}{8}\right)^2$.

ଅତଏବ ଅବଶିଷ୍ଟ ମର୍କଟଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା = $n - \frac{n^2}{64}$ ।

ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ, $n - \frac{n^2}{64} = 12 \Rightarrow n^2 - 64n + 768 = 0$

$$\Rightarrow n = \frac{-(-64) \pm \sqrt{(-64)^2 - 4 \times 1 \times 768}}{2 \times 1} = \frac{64 \pm \sqrt{1024}}{2} = 48 \text{ କିମ୍ବା } 16$$

∴ ଅରଣ୍ୟରେ ଥିବା ସମ୍ଭାବ୍ୟ ମର୍କଟଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା 48 କିମ୍ବା 16। (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 12 :

ଏକ ରେଳଗାଡ଼ି 300 କି.ମି. ଦୀର୍ଘ ଯାତ୍ରା ପଥରେ ସମାନ ବେଗରେ ଗତି କରୁଥିଲା। ଯଦି ଗାଡ଼ିର ବେଗ ଘଣ୍ଟାପ୍ରତି 5 କି.ମି. ଅଧିକ ହୋଇଥା'ନ୍ତା ତେବେ ଗାଡ଼ିଟି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମୟର ଦୁଇଘଣ୍ଟା ପୂର୍ବରୁ ଯଥା ସ୍ଥାନରେ ପହଞ୍ଚିଥା'ନ୍ତା। ତେବେ ଗାଡ଼ିର ଘଣ୍ଟାପ୍ରତି ବେଗ ନିରୂପଣ କର।

ସମାଧାନ :

ମନେକର ଗାଡ଼ିର ବେଗ ଘଣ୍ଟାପ୍ରତି x କି.ମି.। ଏହି ବେଗରେ ଗଲେ ଯାତ୍ରାପଥ ଅତିକ୍ରମ କରିବା ପାଇଁ ଗାଡ଼ିକୁ $\frac{300}{x}$ ଘଣ୍ଟା ସମୟ ଲାଗିବ। ମାତ୍ର ଘଣ୍ଟାକୁ $x + 5$ କି.ମି. ବେଗରେ ଗଲେ $\frac{300}{x+5}$ ଘଣ୍ଟା ଲାଗିଥା'ନ୍ତା।

ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ $\frac{300}{x}-\frac{300}{x+5}=2 \Rightarrow 300\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+5}\right)=2$

$$\Rightarrow \frac{1}{x}-\frac{1}{x+5}=\frac{1}{150} \Rightarrow x^2 + 5x - 750 = 0$$

$$\Rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{25+3000}}{2}=\frac{-5\pm 55}{2} = 25 \text{ କିମ୍ବା } -30 ।$$

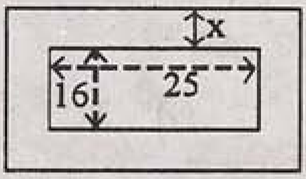
$\therefore$ x = –30 ଗ୍ରହଣୀୟ ନୁହେଁ (କାରଣ ବେଗ ଋଣାତ୍ମକ ହେବା ଅସମ୍ଭବ) ।

$\therefore$ ଗାଡ଼ିର ବେଗ ଘଣ୍ଟାକୁ 25 କି.ମି. । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 13:

ଏକ ଆୟତାକାର ପଡ଼ିଆର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 25 ମିଟର, ପ୍ରସ୍ଥ 16 ମିଟର ଓ ପଡ଼ିଆର ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ସମାନ ଚୌଡ଼ାର ଏକ ରାସ୍ତା ଅଛି । ଯଦି ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବା ରାସ୍ତାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 230 ବର୍ଗ ମିଟର ତେବେ ରାସ୍ତାର ଚଉଡ଼ା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :



ମନେକର ରାସ୍ତାଟିର ଚୌଡ଼ା x ମିଟର ।

ସୁତରାଂ ରାସ୍ତାକୁ ବିଚାର କରି ଲବ୍ଧ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ

= (25 + 2x) ମିଟର ଓ ପ୍ରସ୍ଥ = (16 + 2x) ମିଟର ।

ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ, $(25 + 2x)(16 + 2x) - 25 \times 16 = 230$

$$\Rightarrow 400 + 82x + 4x^2 - 400 - 230 = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 + 82x - 230 = 0 \Rightarrow 2x^2 + 41x - 115 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-41\pm\sqrt{41^2-4\times 2(-115)}}{2\times 2} = \frac{-41\pm 51}{4}$$

ଅର୍ଥାତ୍ $x = \frac{5}{2}$ ମିଟର ($\because x = \frac{-92}{4} = -23$ ଗ୍ରହଣୀୟ ନୁହେଁ)

ଅତଏବ ପଡ଼ିଆର ଚତୁଃପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ରାସ୍ତାର ଚଉଡ଼ା 2.5 ମିଟର । (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ – 2(b)

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କର ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

(i) $x - 2\sqrt{x} - 6 = 0$ ସମୀକରଣରେ xର କେଉଁ ପରିବର୍ତ୍ତନ ଘଟାଇଲେ ଏହା ଏକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ରୂପେ ପ୍ରକାଶିତ ହୋଇପାରିବ ? ପରିବର୍ତ୍ତିତ ସମୀକରଣଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ii) ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟା ଓ ଏହାର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମର ସମଷ୍ଟି 2 । ସଂଖ୍ୟାଟିକୁ x ନେଇ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ଗଠନ କର ।

(iii) $(x^2 + 3x + 2)^2 - 8(x^2 + 3x) - 4 = 0$ ସମୀକରଣଟିକୁ $at^2 + bt + c = 0$ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କର।

(iv) $\sqrt{x+9} + 3 = x$କୁ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କର।

(v) "ଦୁଇ କ୍ରମିକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ 240"। ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକୁ n ନେଇ ଆବଶ୍ୟକୀୟ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ଗଠନ କର।

(vi) ଏକ ଆୟତ କ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ପ୍ରସ୍ଥ ଅପେକ୍ଷା 5 ମିଟର ଅଧିକ ଓ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 150 ବର୍ଗ ମିଟର। ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ପ୍ରସ୍ଥର ନିରୂପଣ ପାଇଁ ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ x ମିଟର ନେଇ ଆବଶ୍ୟକୀୟ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣଟି ଗଠନ କର।

(vii) ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗଫଳ 18 ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ 56। ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟାକୁ 'x' ନେଇ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ଗଠନ କର।

2. ସମାଧାନ କର।

(i) $4x^4 - 21x^2 + 20 = 0$ (ii) $2x^4 - 5x^2 + 3 = 0$

(iii) $4x^4 - 33x^2 + 8 = 0$ (iv) $x^{-4} - 5x^{-2} + 4 = 0$

(v) $3x + \frac{5}{16x} - 2 = 0$ (vi) $(3x^2 - 8)^2 - 23(3x^2 - 8) + 76 = 0$

(vii) $(x^2+3x+2)^2 - 8(x^2+3x) - 4 = 0$ (viii) $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 - \left(\frac{x+1}{x-1}\right) - 3 = 0$

(ix) $\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^4 - 10\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)^2 + 9 = 0$ (x) $\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)^4 - 6\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)^2 + 8 = 0$

(xi) $16x(x+1)(x+2)(x+3) = 9$ (xii) $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$

(xiii) $\sqrt{2x+9} + x = 13$ (xiv) $\sqrt{2x + \sqrt{2x+4}} = 4$

3. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କ ଉତ୍ତର ଦିଅ।

(i) କୌଣସି ସଂଖ୍ୟା ଓ ତାହାର ବର୍ଗ ସମାନ ହେଲେ ସଂଖ୍ୟାଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

(ii) ଦୁଇଟି କ୍ରମିକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ 380 ହେଲେ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ସ୍ଥିର କର।

(iii) ଦୁଇଟି କ୍ରମିକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟାର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟର ଯୋଗଫଳ $\frac{11}{30}$ ହେଲେ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟଙ୍କୁ ନିରୂପଣ କରିବା ପାଇଁ ସମୀକରଣଟି ଗଠନ କରି ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ନିରୂପଣ କର।

(iv) ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ତାହାର ଧନାତ୍ମକ ବର୍ଗମୂଳର ସମଷ୍ଟି $\frac{6}{25}$ ହେଲେ, ସଂଖ୍ୟାଟି ସ୍ଥିର କର।

(v) ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ତାହାର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମର ସମଷ୍ଟି $\frac{17}{4}$ ହେଲେ, ସଂଖ୍ୟାଟି ସ୍ଥିର କର।

4. ଜଣେ ସାଇକେଲ ଆରୋହୀ 40 କି.ମି. ଦୂର ଗୋଟିଏ ସ୍ଥାନକୁ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବେଗରେ ଗଲେ। ଯଦି ସେ ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି ବେଗ ଆଉ 2 କି.ମି. ବଢ଼ାଇଥା'ନ୍ତେ ତେବେ ଲକ୍ଷ୍ୟ ସ୍ଥାନରେ ଏକ ଘଣ୍ଟା ଆଗରୁ ପହଞ୍ଚି ପାରିଥାନ୍ତେ। ତେବେ ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି ତାଙ୍କର ବେଗ କେତେ ଥିଲା ?

5. ଦୁଇଗୋଟି ସଂଖ୍ୟାର ସମଷ୍ଟି 15 ଓ ସେମାନଙ୍କ ବ୍ୟୁତକ୍ରମ ରାଶିଦ୍ୱୟର ସମଷ୍ଟି $\frac{3}{10}$ ହେଲେ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ନିରୂପଣ କର।

6. ଦୁଇଗୋଟି ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିଏ ଅପରଟି ଅପେକ୍ଷା 3 ବୃହତ୍ତର। ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟର ବର୍ଗର ସମଷ୍ଟି 117 ହେଲେ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ସ୍ଥିର କର।

7. ଏକ ସମକୋଣୀ Δ ର ସମକୋଣର ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁଦ୍ୱୟ $5x$ ଓ $3x-1$ ଏକକ ଓ କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 60 ବର୍ଗ ଏକକ। ତେବେ ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

8. ଏକ ଦୁଇ ଅଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟାର ଅଙ୍କଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ 14। ସଂଖ୍ୟାରେ 45 ଯୋଗକଲେ ସଂଖ୍ୟାର ଅଙ୍କଦ୍ୱୟର ସ୍ଥାନ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହୋଇଯାଏ। ସଂଖ୍ୟାଟି ନିରୂପଣ କର।

9. ଜଣେ ବ୍ୟକ୍ତି ତାଙ୍କ ଚାଲିବାର ବେଗକୁ ଯଦି ଘଣ୍ଟାପ୍ରତି 1 କି.ମି. ବୃଦ୍ଧି କରନ୍ତେ ତେବେ 2 କି.ମି. ରାସ୍ତା ଅତିକ୍ରମ କରିବା ପାଇଁ 10 ମିନିଟ୍ କମ୍ ସମୟ ନେଇଥା'ନ୍ତେ। ତେବେ ବ୍ୟକ୍ତିଙ୍କର ଚାଲିବାର ଘଣ୍ଟାପ୍ରତି ବେଗ ନିରୂପଣ କର।

[ସୂଚନା : ବେଗ $=\frac{\text{ଦୂରତା}}{\text{ସମୟ}}$, ତେଣୁ $\frac{2}{x}-\frac{2}{x+1}=\frac{10}{60}$]

10. ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 165 ବର୍ଗ ମିଟର। ଯଦି ଏହାର ଉଚ୍ଚତା ଭୂମି ଅପେକ୍ଷା 7 ମିଟର ଅଧିକ ହୁଏ, ତେବେ ଏହାର ଭୂମି ଓ ଉଚ୍ଚତା ନିରୂପଣ କର।

11. ଏକ ନୌକାର ବେଗ ସ୍ଥିର ଜଳରେ 11 କି.ମି. ପ୍ରତି ଘଣ୍ଟା। ଏହା ସ୍ରୋତର ପ୍ରତିକୂଳରେ 12 କି.ମି. ଗମନ କରି ପୁନଶ୍ଚ (ଅନୁକୂଳରେ) ଫେରି ଆସିବାକୁ 2ଘଣ୍ଟା 45 ମିନିଟ୍ ସମୟ ନେଲା। ତେବେ ସ୍ରୋତର ଘଣ୍ଟାପ୍ରତି ବେଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

12. ଗୋଟିଏ ଶ୍ରେଣୀର ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସଂଖ୍ୟକ ଛାତ୍ରଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ 250 ଟଙ୍କାକୁ ସମାନ ଭାଗରେ ବଣ୍ଟାଗଲା। ଯଦି 25 ଜଣ ଛାତ୍ର ଅଧିକ ହୋଇଥା'ନ୍ତେ, ତେବେ ପ୍ରତ୍ୟେକ 0.50 ଟଙ୍କା ଲେଖାଏଁ କମ୍ ପାଇଥା'ନ୍ତେ। ତେବେ ଶ୍ରେଣୀର ଛାତ୍ର ସଂଖ୍ୟା ସ୍ଥିର କର।

13. ଗୋଟିଏ ଗାଈଗୋଠର ଏକ ଚତୁର୍ଥାଂଶ ଦୃଷ୍ଟିଗୋଚର ହେଉଥିଲେ। ଗୋଠରେ ଥିବା ଗାଈ ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗମୂଳର ଦୁଇଗୁଣ ସଂଖ୍ୟକ ଗାଈ ପାହାଡ଼ର ପାଦଦେଶରେ ବୁଲୁଥିଲେ ଏବଂ ଅବଶିଷ୍ଟ 15ଟି ଗାଈ ନଦୀକୂଳରେ ଥିଲେ। ତେବେ ଗୋଠରେ କେତୋଟି ଗାଈ ଥିଲେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

14. ଗୋଟିଏ ଆୟତାକାର ପଡ଼ିଆର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 32 ମିଟର ଏବଂ ପ୍ରସ୍ଥ 24 ମିଟର ଓ ଏହି ପଡ଼ିଆର ଭିତର ଧାରକୁ ଲାଗି ଏକ ସମାନ ଚଉଡ଼ାର ରାସ୍ତା ଅଛି। ଯଦି ରାସ୍ତାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 208 ବ.ମି. ହୁଏ, ତେବେ ରାସ୍ତାର ଚଉଡ଼ା ସ୍ଥିର କର।